Werner Kratz
Marius Hofert

Universität Ulm
Wintersemester 2008/2009
04.12.2008

Übungen zur Analysis 2

Blatt 9

Abgabe und Besprechung, Donnerstag, den 11.12.2008

Aufgabe 43 (4 Punkte)

Es sei $f : M \to \mathbb{R}$ stetig auf $M = [a, b] \times [a, b] \subset \mathbb{R}^2$ mit $a < b$.

(a) Berechne $\dfrac{d}{dy} \displaystyle\int_a^y \left(\int_t^y f(x,t)\, dx \right) dt$ für $y \in [a, b]$.

(b) Zeige, dass $\displaystyle\int_a^b \left(\int_a^x f(x,t)\, dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_t^b f(x,t)\, dx \right) dt$. Skizziere die „iterierten Integrationsbereiche“ im $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 44 (8 Punkte)

(a) Berechne die Ableitung von $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ und skizziere den Graphen von f sowie die Vektoren $(\operatorname{grad} f(x_0, y_0))^T$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0,y_0) \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$ für $\binom{x_0}{y_0} = \binom{2}{1}$.

(b) Berechne die Ableitung von $F(x, y) = 9x^2 + 4y^2 - 8y - 32$ und skizziere die Punktmenge $M = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$ sowie den Vektor $(\operatorname{grad} F(x_0, y_0))^T$ für $\binom{x_0}{y_0} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1-3/\sqrt{2} \end{pmatrix} \in M$.

(c) Berechne die Ableitung von $x(t) = \binom{2\cos t}{1-3\sin t}$ und skizziere die Kurve $x(t)$ sowie den Ableitungsvektor $\dot{x}(t_0)$ für $t_0 = 3\pi/4$.

(d) Berechne die Ableitung von $x(r, \psi, \varphi) = \begin{pmatrix} r \sin\psi \cos\varphi \\ r \sin\psi \sin\varphi \\ r \cos\psi \end{pmatrix}$ und skizziere die Punktmenge $M = \{x(r, \psi, \varphi) \mid r \in [0, 1], \psi \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\}$ sowie die Vektoren x_r, x_ψ und x_φ im Punkte $\begin{pmatrix} r_0 \\ \psi_0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pi/2 \\ \pi/2 \end{pmatrix}$. Berechne zusätzlich $\det(x'(r, \psi, \varphi))$.

Aufgabe 45 (6 Punkte)

Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : M \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in M$.

(a) Zeige: Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ mit $|v| = 1$ existiert die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$, und es gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \operatorname{grad} f(x_0) \cdot v$.

(b) Für welches $v \in \mathbb{R}^n$ mit $|v| = 1$ ist $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ maximal bzw. minimal?
Hinweis: Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

(c) Es sei nun $M = \mathbb{R}^3$ und $f(x, y, z) = x^2 + ze^y$.

(i) Berechne $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0,1)$ für $v = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(ii) Für welches $v \in \mathbb{R}^n$ mit $|v| = 1$ ist $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0,1)$ maximal?

Aufgabe 46 (4 Punkte)

Berechne alle stationären Punkte folgender Funktionen aus M:

(a) $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$, $M = (0,\pi) \times (0,\pi)$.

(b) $f(x,y,z) = 4yz - y^2 - \cos x + 6z - 5z^2$, $M = \mathbb{R}^3$.

`http://www.mathematik.uni-ulm.de/m5/mhofert/ana2/`